

# Control 4 Introducción al Álgebra MA1101

## Parte Problema 1

En el desarrollo de  $(1+x)^{16} \left( \frac{a}{x^2} - b \cdot x^{\frac{10}{3}} \right)^8$   $a, b \neq 0$

a) Determine el coeficiente de  $x^{16}$

Solución:

$$(1+x)^{16} \left( \frac{a}{x^2} - b x^{\frac{10}{3}} \right)^8 = \left( \sum_{k=0}^{16} \binom{16}{k} x^k \right) \left( \sum_{i=0}^8 (-1)^i \left( \frac{a}{x^2} \right)^{8-i} \left( b x^{\frac{10}{3}} \right)^i \right)$$

$$\text{en sumas dobles} = \sum_{k=0}^{16} \sum_{i=0}^8 (-1)^i \binom{16}{k} \binom{8}{i} a^{8-i} b^i x^k \left( \frac{1}{x^2} \right)^{8-i} \left( x^{\frac{10}{3}} \right)^i$$

1.5  $\rightarrow$  
$$= \sum_{k=0}^{16} \sum_{i=0}^8 (-1)^i \binom{16}{k} \binom{8}{i} a^{8-i} b^i x^{k-16+2i+\frac{10}{3}i}$$

Segue que el exponente de  $x$  es:  $k + \frac{16}{3}i - 16$  de donde, para  $x^{16}$  debe ocurrir que  $k + \frac{16}{3}i - 16 = 16$ , es decir

$$k + \frac{16}{3}i - 16 = 16 \Leftrightarrow k + \frac{16}{3}i = 32 \text{ con } \begin{cases} 0 \leq k \leq 16 \\ 0 \leq i \leq 8 \end{cases}$$

1.5  $\rightarrow$  Las únicas combinaciones posibles son  $\begin{cases} i=3 \wedge k=16 \\ i=6 \wedge k=0 \end{cases}$

1.5  $\rightarrow$  Segue que coeficiente de  $x^{16}$  es:  $(-1)^3 \binom{16}{16} \binom{8}{3} a^5 b^3 + (-1)^6 \binom{16}{0} \binom{8}{6} a^2 b^6$   

$$= -\frac{8!}{3!5!} a^5 b^3 + \frac{8!}{6!2!} a^2 b^6 = -56 a^5 b^3 + 28 a^2 b^6$$

b) ¿Que condición debe existir entre  $a$  y  $b$  para que no exista término en  $x^{16}$

$$\text{El coeficiente de } x^{16} \text{ es: } 28 a^2 b^6 - 56 a^5 b^3 = 28 a^2 b^3 (b^3 - 2a^3)$$

Dado que  $a, b \neq 0$ , el coeficiente será nulo si

1.5  $\rightarrow$  
$$b^3 - 2a^3 = 0, \text{ o bien } b^3 = 2a^3 \text{ o } b = a \sqrt[3]{2}$$

## Punto Problema 2

Calcule, en función de  $n$ , la suma

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \binom{n}{k-1} 3^k$$

Desarrollando  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \binom{n}{k-1} 3^k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} 3^k$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k! (n-k+1)!} 3^k$$

1.0 →

Completando el número combinatorio queda  $\sum_{k=1}^n \frac{n! (n+1)}{k! (n-k+1)! (n+1)} 3^k$

2.0 →

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} 3^k$$

Para  $\sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} 3^k = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 3^k - \binom{n+1}{0} 3^0 - \binom{n+1}{n+1} 3^{n+1}$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 3^k - 1 - 3^{n+1}$$

y  $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 3^k = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 3^k \cdot 1^{n+1-k} = (3+1)^{n+1}$  binomio.

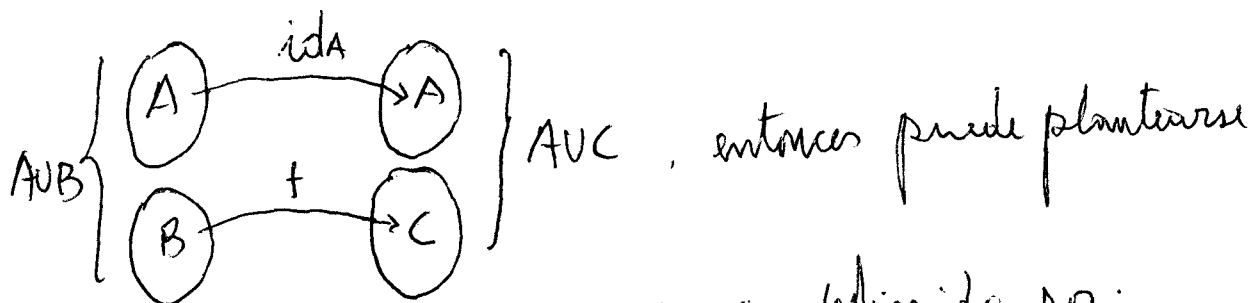
3.0 →

Sigue que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \binom{n}{k-1} 3^k = \frac{1}{n+1} [4^{n+1} - 3^{n+1} - 1]$

# Pauta Problema 3

- i) Sean  $A, B, C$  conjuntos infinitos tales que  
 $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \cap C = \emptyset$  y  $|B| = |C|$   
 Demuestra que  $|A \cup B| = |A \cup C|$

Solución: Como  $|B| = |C| \Rightarrow \exists f: B \rightarrow C$  biyectivo.  
 Además como  $A \cap B = \emptyset$  y  $A \cap C = \emptyset$  ( $A$  es disjunta con  $B, C$ )  
 se puede establecer el siguiente esquema.



entonces puede plantearse  
 una biyección  $g: A \cup B \rightarrow A \cup C$  definido por:

$$g(x) = \begin{cases} \text{ida}_A(x) & \text{si } x \in A \\ f(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

1.5  $\rightarrow$  y por lo tanto  $|A \cup B| = |A \cup C|$

- ii) Considere el conjunto  $C = \{ \dots, -9, -4, -1, 1, 4, 9, 16, \dots \}$   
 Es decir,  $C$  es el conjunto de los cuadrados de los naturales y  
 sus opuestos.

Demuestra que  $C$  es infinito numerable.  
 Es claro que  $C$  es infinito al contener, al menos, los cuadrados  
 de todos los naturales.

Puede plantearse que  $C = C_1 \cup C_2$  donde  $C_1 = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$  y  
 $C_2 = \{-1, -4, -9, -16, \dots\}$  y las biyecciones  $f: \mathbb{N} \rightarrow C_1$  y

$g: \mathbb{N} \rightarrow C_2$  con lo cual  $C_1$  y  $C_2$  son numerables  
 Como la unión de numerables es numerable, se concluye  
 que  $C$  es numerable.

3.0  $\rightarrow$